ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΗΝ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Πότε ένα σώμα κάνει κυκλική κίνηση;

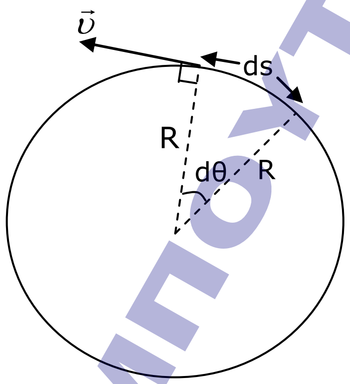
Ένα σώμα κάνει κυκλική κίνηση όταν η τροχιά του είναι κύκλος.

Με ποια μεγέθη προσδιορίζεται στην κυκλική κίνηση πόσο γρήγορα κινείται το σώμα;

Στην κυκλική κίνηση εκτός απ' τη γνωστή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ που χρησιμοποιήσαμε στην ευθύγραμμη κίνηση, χρησιμοποιείται και η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ της οποία όπως θα δούμε η χρήση της έχει πολλά πλεονεκτήματα σε αυτήν την κίνηση. Για να ξεχωρίζουμε τις δύο ταχύτητες πολλές φορές τη γνωστή μας ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ την λέμε γραμμική ταχύτητα.

Πως ορίζεται η γραμμική ταχύτητα;

Η γραμμική ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος. Το μέτρο του ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής του μήκους τόξου που διαγράφει το σώμα δηλαδή $|\upsilon| = \frac{ds}{dt}$. Η κατεύθυνση του διανύσματος της γραμμικής ταχύτητας είναι εφαπτομένη στην τροχιά στο σημείο που βρίσκεται το σώμα όπως φαίνεται στο σχήμα 1:



Σχήμα 1

Επομένως είναι προφανές ότι όταν ένα σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση, σίγουρα μεταβάλλεται η κατεύθυνση της γραμμικής του ταχύτητας.
Η μονάδα της γραμμικής ταχύτητας στο SI είναι το γνωστό μας m/s.

Πως ορίζεται η γωνιακή ταχύτητα;

Η γωνιακή ταχύτητα είναι επίσης διανυσματικό μέγεθος. Το μέτρο της ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της επίκεντρης γωνίας που διαγράφει το σώμα (σχήμα 1). Δηλαδή $|\omega| = \frac{d\theta}{dt}$. Η διεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας είναι κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς δηλαδή κάθετη στη σελίδα που διαβάζετε. Η φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού που θα τον συναντήσουμε αρκετές φορές στο μέλλον. Τοποθετούμε το δεξί χέρι πάνω στην κυκλική τροχιά έτσι ώστε τα τέσσερα δάχτυλα εκτός του αντίχειρα να ακολουθούν την περιστροφή του σώματος. Τότε ο αντίχειρας μας δείχνει την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας. Για παράδειγμα στο σώμα του σχήματος 1 η γωνιακή ταχύτητα έχει κατεύθυνση από τη σελίδα προς τα εμάς. Δοκιμάστε το.
Βασική ιδιότητα της γωνιακής ταχύτητας είναι ότι αλλάζει κατεύθυνση μόνο όταν το σώμα αλλάξει φορά περιστροφής και όχι από σημείο σε σημείο της τροχιάς όπως συμβαίνει με την γραμμική ταχύτητα και αυτό όπως θα δούμε απλοποιεί πολύ τα πράγματα σε ορισμένες περιπτώσεις.
Η μονάδα της γωνιακής ταχύτητας στο SI είναι το rad/s.

Σχέση μέτρων γραμμικής-γωνιακής ταχύτητας

Από τη γεωμετρία είναι γνωστή η σχέση που συνδέει το μήκος ενός τόξου ds κάποιου κύκλου, με την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία dθ όταν αυτή μετριέται σε rad (ακτίνια). Αυτή η σχέση είναι ds=Rdθ. Άρα εύκολα προκύπτει : $|\upsilon| = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt}$ =R$|\omega|$. Άρα η σχέση που ζητάμε είναι η $|\upsilon|$=R$|\omega|$.

Σχέση ακτίνιου και μοίρας.

Αρκεί να ξέρουμε ότι π rad είναι 180^o. Έτσι πχ 90^o είναι π/2 rad, π/4 rad είναι 45^o κοκ. Να θυμηθούμε ότι π=3,1415927….Μας αρκεί το π=3,14.

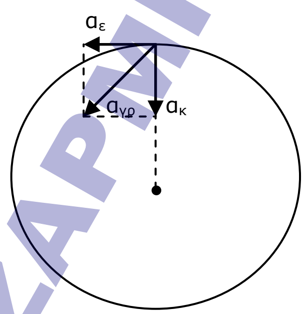
Με ποια μεγέθη προσδιορίζεται στην κυκλική κίνηση πόσο γρήγορα αλλάζει η ταχύτητα του σώματος;

Αφού στην κυκλική κίνηση ορίζονται δύο ταχύτητες, είναι λογικό να ορίζονται και δύο επιταχύνσεις. Η μια έχει σχέση με τη μεταβολή της γραμμικής ταχύτητας και λέγεται γραμμική επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma\rho}$ και η άλλη έχει σχέση με τη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας και λέγεται γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$.

Πως ορίζεται η γραμμική επιτάχυνση;

Η γραμμική επιτάχυνση ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος της γραμμικής ταχύτητας δηλαδή $\vec{\alpha}_{\gamma\rho} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$. Όπως όμως αναφέρθηκε πριν, η κατεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας αλλάζει πάντα στην κυκλική κίνηση. <u>Άρα στην κυκλική κίνηση η γραμμική επιτάχυνση δεν είναι ποτέ μηδέν</u>.

Η κατεύθυνση της γραμμικής επιτάχυνσης είναι πάντα προς το μέσα μέρος της τροχιάς. Για καλύτερη μελέτη της γραμμικής επιτάχυνσης αυτή αναλύεται σε δύο συνιστώσες όπως φαίνεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2

Η μία συνιστώσα είναι στη διεύθυνση της εφαπτομένης στο σημείο που βρίσκεται το σώμα και λέγεται <u>επιτρόχια</u> επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\varepsilon}$ και η άλλη είναι στη διεύθυνση της ακτίνας και λέγεται <u>κεντρομόλος</u> επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\kappa}$. Προφανώς ισχύει $|\alpha_{\gamma\rho}| = \sqrt{|\alpha_{\varepsilon}|^2 + |\alpha_{\kappa}|^2}$. Μονάδα της γραμμικής επιτάχυνσης στο SI είναι το m/s^2.

Κάθε μια συνιστώσα της γραμμικής επιτάχυνσης παίζει πολύ συγκεκριμένο ρόλο. Συγκεκριμένα :

● Η επιτρόχια επιτάχυνση είναι «υπεύθυνη» για την μεταβολή του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας. Άρα αν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό δεν υπάρχει αυτή η συνιστώσα. Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης είναι ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας δηλαδή $|\alpha_{\varepsilon}| = \frac{d|\upsilon|}{dt}$.

● Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι «υπεύθυνη» για την μεταβολή της κατεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας. Άρα στην κυκλική κίνηση ποτέ αυτή η συνιστώσα δεν είναι μηδέν αφού πάντα αλλάζει η κατεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης αποδεικνύεται ότι είναι $|\alpha_\kappa| = \frac{|\upsilon|^2}{R}$.

Πως ορίζεται η γωνιακή επιτάχυνση;

Η γωνιακή επιτάχυνση ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας δηλαδή $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. Η κατεύθυνση της γωνιακής επιτάχυνσης είναι ίδια με αυτή της γωνιακής ταχύτητας όταν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας αυξάνεται και αντίθετη με αυτή της γωνιακής ταχύτητας όταν το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας μειώνεται. Η αναλογία με την κατεύθυνση της επιτάχυνσης στην ευθύγραμμη κίνηση είναι προφανής. Αφού τα διανύσματα $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$ και $\vec{\omega}$, έχουν πάντα την ίδια διεύθυνση ισχύει και η σχέση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ (δηλαδή η σχέση με αλγεβρικές τιμές). Η γωνιακή επιτάχυνση σε αντίθεση με τη γραμμική επιτάχυνση μπορεί να είναι μηδέν, αφού η γωνιακή ταχύτητα μπορεί να είναι σταθερή και σε μέτρο και σε κατεύθυνση. Μονάδα της γωνιακής επιτάχυνσης στο SI είναι το rad/s^2. Τα μέτρα της επιτρόχιας και της γωνιακής επιτάχυνσης συνδέονται με τη σχέση $|\alpha_\varepsilon| = |\alpha_{\gamma\omega\nu}| \cdot R$.

Ομαλή Κυκλική Κίνηση

Ομαλή κυκλική κίνηση κάνει ένα σώμα όταν κινείται σε κυκλική τροχιά και το μέτρο της γραμμικής του ταχύτητας παραμένει σταθερό. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, όταν η γωνιακή του ταχύτητα παραμένει σταθερή (σε μέτρο και κατεύθυνση).

Χαρακτηριστικά μεγέθη στην ομαλή κυκλική κίνηση

Αφού το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος παραμένει σταθερό σε αυτήν την κίνηση, το σώμα σε ίσους χρόνους θα διανύει ίσα τόξα. Άρα ο χρόνος για μια ολόκληρη περιστροφή του σώματος θα είναι πάντα ο ίδιος. Αυτός ο χρόνος λέγεται <u>περίοδος Τ</u>. Προφανώς η περίοδος στο σύστημα SI μετριέται σε s. Ο αριθμός των περιστροφών που εκτελεί το σώμα σε μια μονάδα χρόνου πχ 1s, λέγεται <u>συχνότητα f</u>. Η συχνότητα στο σύστημα SI μετριέται σε Hz (1Hz=1περιστροφή/s). Η περίοδος και η συχνότητα είναι χαρακτηριστικά μεγέθη σε όλα τα περιοδικά φαινόμενα. Περιοδικό φαινόμενο είναι το φαινόμενο που επαναλαμβάνεται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Τέτοιο φαινόμενο είναι η κίνηση ενός σώματος που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Σχέσεις που ισχύουν στην ομαλή κυκλική κίνηση

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας δίνεται γενικά από τη σχέση $|\upsilon| = \frac{ds}{dt}$. Όμως στην ομαλή κυκλική κίνηση $|\upsilon|$=σταθ. άρα δεν είναι ανάγκη να περιορίσουμε τη σχέση σε απειροστό χρονικό διάστημα dt άλλα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα Δt. Οπότε προκύπτει η σχέση $|\upsilon| = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Με ακριβώς παρόμοιο συλλογισμό για τη γωνιακή ταχύτητα προκύπτει η σχέση $|\omega| = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Αν αυτές οι σχέσεις εφαρμοστούν για χρονικό διάστημα ίσο με την περίοδο της κίνησης δηλαδή Δt=T, τότε έχουμε

Δs=2πR και Δθ=2π. Άρα έχουμε τις σχέσεις $|\upsilon| = \frac{2\pi R}{T}$ και $|\omega| = \frac{2\pi}{T}$ (επιβεβαιώνεται έτσι και η σχέση $|\upsilon| = |\omega| R$). Αν το σώμα μας σε χρονικό διάστημα Δt εκτελεί N πλήρεις περιστροφές τότε προφανώς $f = \frac{N}{\Delta t}$. Για Δt=T είναι N=1. Άρα έχουμε τη σχέση $f = \frac{1}{T}$. Αφού στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας είναι σταθερό, από τις δύο συνιστώσες της γραμμικής επιτάχυνσης μόνο η κεντρομόλος θα είναι διαφορετική από μηδέν. Δηλαδή $\vec{\alpha}_\varepsilon = \vec{0}$. Άρα $\vec{\alpha}_{\gamma\rho} = \vec{\alpha}_\kappa$ με $|\alpha_{\gamma\rho}| = |\alpha_\kappa| = \frac{|\upsilon|^2}{R}$. Δηλαδή η γραμμική επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της τροχιάς. Επειδή τώρα η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή και σε μέτρο και σε κατεύθυνση, δεν θα υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση. Δηλαδή $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \vec{0}$.

Δύναμη στην ομαλή κυκλική κίνηση

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής ξέρουμε ότι $\vec{F}_{o\lambda} = m\vec{a}$. Εδώ βέβαια όπου $\vec{a}$ εννοούμε την γραμμική επιτάχυνση. Άρα αφού $|\alpha_{\gamma\rho}| = |\alpha_\kappa| = \frac{|\upsilon|^2}{R}$, θα είναι στην ομαλή κυκλική κίνηση $|F_{o\lambda}| = \frac{m|\upsilon|^2}{R}$. Η κατεύθυνση της $F_{o\lambda}$ είναι ίδια με της επιτάχυνσης που σε αυτήν την περίπτωση είναι προς το κέντρο της τροχιάς. Γι' αυτό το λόγο η $\vec{F}_{o\lambda}$ λέγεται κεντρομόλος δύναμη στην ομαλή κυκλική κίνηση. Να προσέξουμε ότι η κεντρομόλος δύναμη δεν είναι μια επιπλέον δύναμη που ασκείται στο σώμα αλλά είναι η συνισταμένη όλων των άλλων γνωστών δυνάμεων. Δηλαδή τελικά το συμπέρασμα είναι ότι ένα σώμα που κάνει ομαλή κυκλική κίνηση, δέχεται δυνάμεις των οποίων η συνισταμένη έχει κατεύθυνση συνέχεια προς το κέντρο της τροχιάς και μέτρο $\frac{m|\upsilon|^2}{R}$.

Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση

Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση, ονομάζεται η κυκλική κίνηση στην οποία η γωνιακή επιτάχυνση παραμένει σταθερή. Για να πάρουμε τις σχέσεις που ισχύουν σε αυτή την κίνηση, δεν έχουμε παρά να πάρουμε τις αντίστοιχες που ισχύουν στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη και να κάνουμε τις αντιστοιχίες : $\alpha \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}$, $\upsilon \rightarrow \omega$, $\Delta x \rightarrow \Delta\theta$ (σε rad). Έτσι προκύπτουν οι σχέσεις :

***Σχέσεις* αλγεβρικών τιμών**

	Γωνία	Γωνιακή Ταχύτητα	Γωνιακή Επιτάχυνση
Ομαλή Κυκλική	$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$	$\omega =$ σταθερή	$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$
Ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική	$\Delta\theta = \omega_o \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2$	$\omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t$	$\alpha_{\gamma\omega\nu} =$ σταθερή

• Όταν εφαρμόζουμε τις σχέσεις με αλγεβρικές τιμές, θα πρέπει να θεωρούμε μια θετική φορά περιστροφής (όποια θέλουμε) η οποία οδηγεί με τον κανόνα του δεξιού χεριού και σε θετική φορά στον άξονα που βρίσκονται τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τα γνωστά μεγέθη με το κατάλληλο πρόσημο.

• Ένα πλεονέκτημα της χρήσης των σχέσεων με αλγεβρικές τιμές σε σχέση με αυτές που ακολουθούν με τα μέτρα, είναι ότι βρίσκοντας την αλγεβρική τιμή του άγνωστου μεγέθους (αν είναι διανυσματικό), έχουμε βρει και την κατεύθυνση του.

• Η γωνία Δθ είναι όπως η μετατόπιση Δx της ευθύγραμμης κίνησης δηλαδή αν το σώμα διαγράψει γωνία $\frac{\pi}{2}$ rad δεξιόστροφα και στη συνέχεια $\frac{\pi}{2}$ rad αριστερόστροφα, θα είναι Δθ=0.

Σχέσεις μέτρων

	Γωνία	Γωνιακή Ταχύτητα	Γωνιακή Επιτάχυνση
Ομαλή κυκλική	$\lvert\Delta\theta\rvert = \lvert\omega\rvert \cdot \Delta t$	Σταθερή	Δεν υπάρχει
Ομαλά επιταχυνόμενη κυκλική	$\lvert\Delta\theta\rvert = \lvert\omega_o\rvert \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \lvert\alpha_{\gamma\omega\nu}\rvert \cdot \Delta t^2$	$\lvert\omega\rvert = \lvert\omega_o\rvert + \lvert\alpha_{\gamma\omega\nu}\rvert \cdot \Delta t$	Ίδια φορά με $\vec{\omega}$ και $\vec{\omega}_o$
Ομαλά επιβραδυνόμενη κυκλική	$\lvert\Delta\theta\rvert = \lvert\omega_o\rvert \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \lvert\alpha_{\gamma\omega\nu}\rvert \cdot \Delta t^2$	$\lvert\omega\rvert = \lvert\omega_o\rvert - \lvert\alpha_{\gamma\omega\nu}\rvert \cdot \Delta t$	Αντίθετη φορά με $\vec{\omega}$ και $\vec{\omega}_o$

Όπως και στην ευθύγραμμη κίνηση, όταν η κίνηση στο χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει γίνεται μόνο προς μια φορά, τότε βολεύουν οι σχέσεις με τα μέτρα αλλιώς βολεύουν οι σχέσεις με τις αλγεβρικές τιμές και έτσι δεν είναι ανάγκη να χωρίσουμε την κίνηση σε δύο κινήσεις (επιταχυνόμενη, επιβραδυνόμενη) αλλά την αντιμετωπίζουμε ενιαία.